

**Pour une didactique contextuelle,
retour sur la notion de *situation*
fondamentale pour un corps de
*savoirs***

*quelques problèmes en mathématiques
(et peut-être au delà)*

Alain Mercier

Un symptôme du problème

Parmi les acquis de la Conférence Nationale sur l'Enseignement des Mathématiques, un résultat sur l'enseignement des entiers, des décimaux, et les difficultés actuelles : *aujourd'hui en France, la pratique du système métrique manque aux élèves et aux professeurs...*

- Le Maréchal et Mercier, 2006 (enseigner le volume au collège); Ligozat, 2008 (définir les grandeurs par leur mesure)
- Chevallard et Bosch, 2008-2009 (les nombres concrets et les grandeurs, les ostensifs de la modélisation et du contrôle des calculs)
- Chambris, 2010; Silvy Delcroix Mercier, 2012 (le manque des pratiques de mesurage et d'usage du système métrique, technologie des décimaux) (le système métrique comme théorie de la notation décimale de position).

Enquête : La Disme

Jusqu'à Stevin (et aujourd'hui dans le monde anglo-saxon), on écrit $6 \frac{3}{4}$ au lieu de 6,75.

Les procédures de calculs sont compliquées.

Par exemple, pour l'addition de $6 \frac{3}{4}$ et de $2 \frac{1}{2}$, il faut faire une mise au même dénominateur ou il faut donner un nom à chaque type de sous-unités.

Les fractions décimales permettent d'éviter tout cela, en particulier en permettant une formation automatique des noms de sous- (déci, centi, milli ; micro, nano, pico) et sur-unités (déca, hecto, kilo ; méga, giga, tera).

Enquête : Une addition en nombres complexes...

$$\begin{array}{r} 2 \text{ t } 3 \text{ P } 5 \text{ p } 2 \text{ l} \\ + \quad \quad 4 \text{ P } 7 \text{ p } 11 \text{ l} \\ \hline 2 \text{ t } 7 \text{ P } 12 \text{ p } 13 \text{ l} \end{array}$$

Soit,

$$3 \text{ t } 2 \text{ P } 1 \text{ p } 1 \text{ l}$$

Les retenues ne sont pas régulières et les réductions à la forme standard sont délicates.

Cela pose des problèmes quasi insurmontables au calcul des produits: aires, volumes, densités, vitesses, débits...

Enquête : Les problèmes disparaissent, les questions demeurent !

Exemple 6 : (Châtelet, 1934, destiné aux classes de *Cours Moyen* et de *Fin d'Études*)
« Une laitière a fourni à une crèmière 20 litres de lait. En pesant ce lait, la crèmière a trouvé un poids de 20,555 kg. Ce lait a-t-il été mélangé d'eau ? Qu'est-ce qui le prouve ? Quelle quantité d'eau contient-il ? On rappelle que la densité du lait est de 1,03. »

Mais les questions demeurent, on les rencontre sur les forums...

Qui peut m'expliquer un exercice de chimie que je n'arrive pas à résoudre? Un laboratoire dispose de 2 solutions de chlorure de sodium, de concentration respective 20 g.L^{-1} et 50 g.L^{-1} . Quelle quantité de chaque solution doit-on mélanger pour obtenir 10 L d'une solution de concentration 32 g.L^{-1} ? Merci pour votre aide.
(Tina, élève de 3^e, mai 2012)

Des gestes d'enseignement à (re)trouver

Au delà de l'étude et de la résolution de problèmes, *la direction d'enquête sur des questions et l'exposé contradictoire des éléments de réponse à des questions* sont les enjeux d'une école démocratique.

Mais l'identification des *questions* porteuses des savoirs que l'on voudrait voir appris est un problème didactique difficile, parce que ces questions vivent dans des *situations*.

[...] Pourtant considerant sa tres grande utilité, ce seroit chose louable, si quelcuns, comme ceux qui en attendent la plus grande commodité, sollicitoyent de la faire mettre en effect, à scavoir que joignant les vulgaires partitions qu'il y a maintenant des Mesures, Pois, & Argent (demeurant chasque capitale mesure, Pois & Argent, en tous lieux immuable) l'on ordonnast encore légitimement par les Supérieurs, la susdicte dixième partition, à fin que chacun qui voudroit la pourrait user. Il avancerait aussi la chose, si les valeurs d'argent, principalement de ce qui se forge de nouveau, fussent valuez sur quelques Primes, Secondes, Tierces, &c. [...]

La question de la désignation des unités

Question: Nous sommes passés difficilement des instruments **analogiques** aux instruments **digitaux**, pourquoi ? Faut-il enseigner la distinction ? Les deux types ? **Lire l'heure** est un problème mathématique aujourd'hui mal traité...

Les nombres sont des mesures de la numérosité des collections puis de toutes les grandeurs... Mais comment développer ensemble la capacité innée à évaluer les grandeurs, la maîtrise des techniques de mesurage utiles, et l'étude du calcul en numération décimale de position ?

La représentation analogique des grandeurs

Un instrument de mesure à affichage **analogique** transforme toute grandeur en longueur (longueur d'un arc sur une graduation circulaire ou longueur d'un segment sur une ligne droite) et la graduation décimale de la ligne (arc ou droite) donne par simple lecture **un nombre décimal** qui est la mesure cherchée.

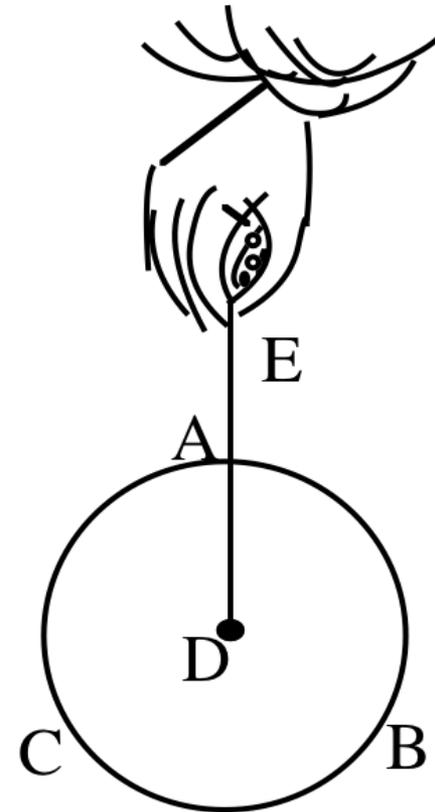
Lorsque l'on observe des classes d'aujourd'hui en anthropologie des pratiques scolaires, ce sont **la pratique des graduations pour définir les nombres** et **la pratique des lignes pour représenter les grandeurs** qui manquent.

Enquête sur *'La Statique'* de Stevin

Définition IV.

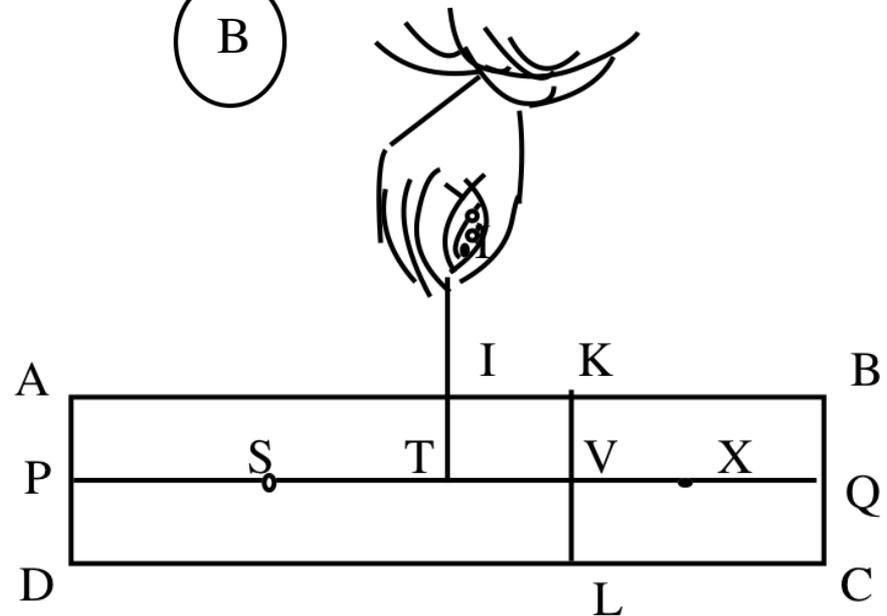
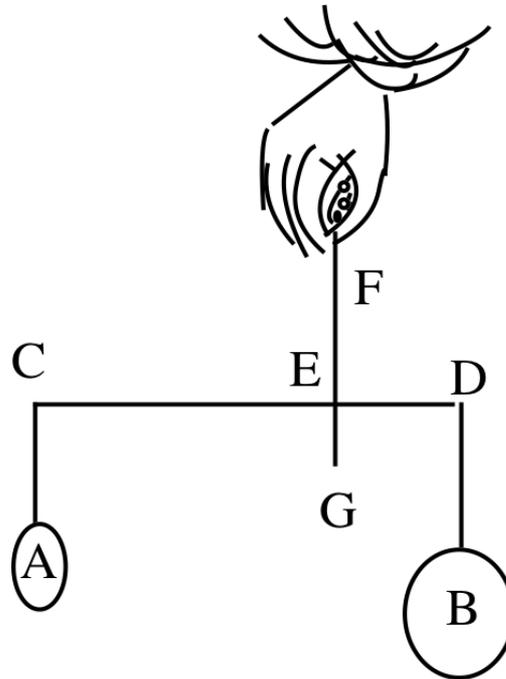
Centre de gravité est celui, auquel si on imagine le solide être suspendu, il se tiendra en toutes les positions qu'on lui peut donner. (...)

(...) Le **centre de gravité** des figures ordonnées comme Colonnes, Globes, Spheroides, et les cinq corps réguliers, et de matière uniforme (*la matière est uniformément répartie*), est le même centre que celui de leurs figures et grandeurs, qui s'appelle autrement **centre géométrique** (...)



Stevin représente graphiquement la force, par la pesanteur.

Une force est représentée par une « colonne », suspendue à un fil tenu par une main. C schéma est un *objet graphique* : la colonne a une **longueur**, qui représente son poids mieux que les sacs...



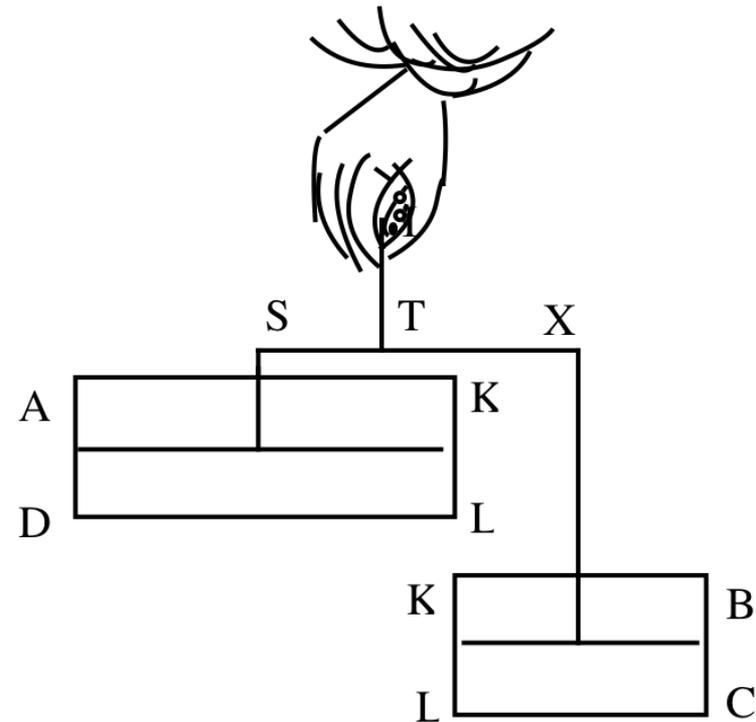
Les forces sont représentées par des longueurs (de colonne)

Imaginons-la colonne coupée selon KL : **l'équilibre demeure, le centre de gravité total reste en place** pourvu que la rigidité de l'ensemble soit assurée.

ADLK représente « la plus pesante pesanteur », de centre de gravité S, au centre de la sous-colonne.

LKBC représente « la plus légère », de centre de gravité X.

Et $ST \times AK = TX \times KB$, c'est la loi des leviers.



Et à l'école?

Le professeur peut écrire au tableau l'annonce produite par l'élève en proposant de la mettre en relation avec le système de représentation qu'est la ligne graduée.

Par exemple : Annonce : $2+1+1$ Lancer : 5

$2+1+1 \neq 5$ ainsi, « *il aurait fallu annoncer un de plus* » ou « *il aurait fallu avoir un de moins au lancer* »

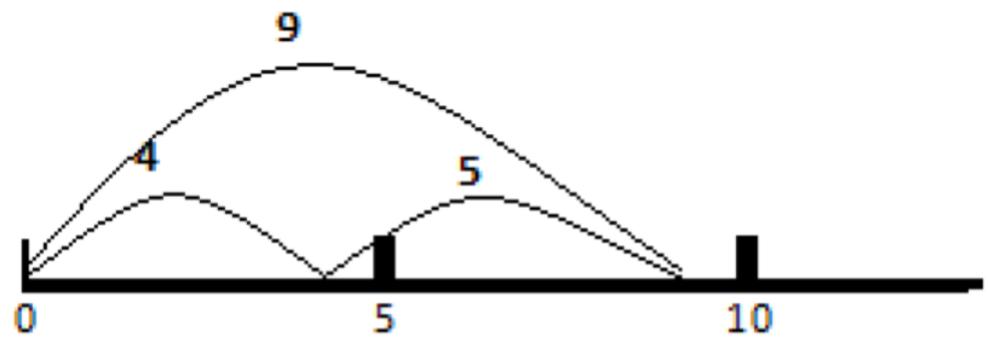
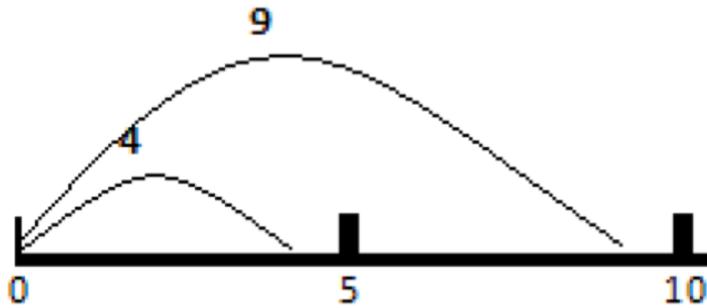
Le professeur pourra en prenant appui sur la ligne graduée user du vocabulaire suivant :

« *4 est différent de 5,*

5 est plus grand que 4, et 4 est plus petit que 5.

5 est plus grand que 4 de 1,

4 est plus petit que 5 de 1 ».



Le
professeur
note au
tableau

$$9 - 4 = 5$$

$$4 + 5 = 9$$

$$5 + 4 = 9$$

$$9 - 5 = 4$$

Il traduit les différences exprimées ici :
Dans la soustraction $9 - 4 = 5$, la différence entre 9 et 4 est de 5, 9, c'est 5 de plus que 4 et 4, c'est 5 de moins que 9.

Dans la soustraction $9 - 5 = 4$, la différence entre 9 et 5 est de 4, 9, c'est 4 de plus que 5 et 5, c'est 4 de moins que 9.

Enquête sur les racines du problème

La transposition et les contre réformes : déstabilisation des *tout-structurés* curriculaires.

Le *substrat* du *site mathématique* d'une notion : quels sont les *éléments de langage* qui font *référence* dans l'étude ?

La fonction épistémologique d'une *situation fondamentale pour un savoir*, définition des propriétés fonctionnelles.

Si les problèmes disparaissent, les questions demeurent !

Exemple 6 : (Châtelet, 1934, destiné aux classes de *Cours Moyen* et de *Fin d'Études*)
« Une laitière a fourni à une crémère 20 litres de lait. En pesant ce lait, la crémère a trouvé un poids de 20,555 kg. Ce lait a-t-il été mélangé d'eau ? Qu'est-ce qui le prouve ? Quelle quantité d'eau contient-il ? On rappelle que la densité du lait est de 1,03. »

Mais les questions demeurent, on les rencontre sur les forums...

Qui peut m'expliquer un exercice de chimie que je n'arrive pas à résoudre ? Un laboratoire dispose de 2 solutions de chlorure de sodium, de concentration respective 20 g.L^{-1} et 50 g.L^{-1} . Quelle quantité de chaque solution doit-on mélanger pour obtenir 10L d'une solution de concentration 32 g.L^{-1} ? Merci pour votre aide.
(Tina, élève de 3^e, mai 2012)

Les usages sociaux des nombres : entiers (ordinaux, cardinaux, codes) décimaux (grandeurs, opérateurs)

Vérifier les données des instruments de calcul: de la question éternelle des ordres de grandeur. Elle est liée à la question précédente.

La question nouvelle de la *vérification des nombres codes*. Techniques de contrôle des erreurs: retour de l'arithmétique.

Plus généralement, enquêter
avec les élèves

Quelles activités d'enquête ?

Étude, expérimentation, enquête

Sur quelles questions enquêter ?

Expérimenter pour quelles réponses ?

Quelles questions étudier ?

Un exemple d'étude/enquête (1)

Pourquoi l'éléphant, le plus gros animal terrestre, est-il bien plus petit que la baleine?

- 1) Enquête: l'assertion est-elle vraie, quelle est sa valeur de généralité ?
- 2) Etude: peut-on évaluer la solidité du squelette d'un vertébré ?
- 3) Enquête: dans l'eau, combien pèse une baleine ?

Les squelettes ...



Galilée avait identifié le phénomène: les os d'un animal 2 ou 3 fois plus grand doivent supporter 8 ou 27 fois plus de poids et être à peu près 3 ou 5 fois plus épais.

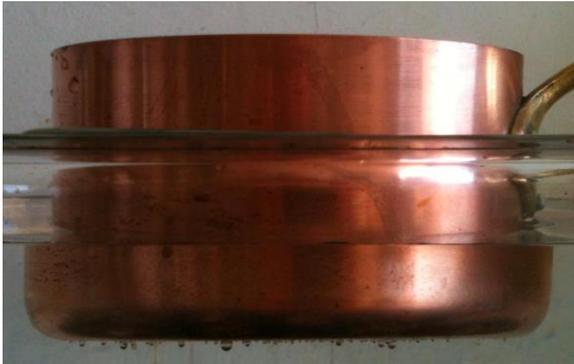
Les pattes avant du chat et de l'éléphant



le rapport semble de 1 à 5 seulement...



Comment flottent les casseroles?



Comme on peut l'expérimenter dans sa cuisine, la petite casserole, de même épaisseur que la grande, flotte « moins bien » (elle s'enfonce de la même hauteur)

...

Le soleil éclaire la lune, mais où est le soleil quand on voit la lune? Où est la lune quand on voit le soleil?

Enquête: observation quotidienne des positions respectives.

Etude: géométrie de ces positions (triangle) et hypothèses sur les variations observées.

Enquête: l'observation dépend-t-elle du lieu d'où l'on observe? Etc.

Principes et conclusion

Bref, ce sont à la fois les espaces et les temps matériels et intellectuels qui devraient être déplacés ou reconfigurés.

Direction de l'étude, accompagnement de l'expérimentation, organisation de l'enquête :

le travail du professeur de mathématiques et sciences, le travail des élèves, ses organisations et ses outils avant, pendant et après la classe, c'est aussi tout cela qui doit changer..